Результаты, полученные при изучении банаховых пределов

Определение. Линейный функционал $B \in l_\infty^*$ (l_∞ — это пространство ограниченных последовательностей с обычной нормой и полуупорядоченностью) называется **банаховым пределом**, если $B \geq 0$, $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots)$, и $Bx = BTx$ для всех $x \in l_\infty$, где T — оператор правого (или левого) сдвига. Ясно, что множество банаховых пределов $\mathfrak{B}$ есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере в l_∞^*.

Если оператор W ограничен в l_∞, то через $\mathfrak{B}(W)$ обозначается множество инвариантных относительно W банаховых пределов. Это означает, что $Bx = BWx$ для всех $x \in l_\infty$. Основные примеры:

W — это оператор Чезаро

$$(Cx)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

или оператор растяжения

$$\sigma_n(x_1, x_2, \ldots) = (\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n}, \ldots),$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Линейный оператор W, действующий в l_∞, называется **$\mathfrak{B}$-собственным**, если $W^*\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$. Найдены критерии $\mathfrak{B}$-собственности оператора и новые свойства экстремальных точек множества $\mathfrak{B}(W)$. Заметим, что $\operatorname{ext}\mathfrak{B}(W) \neq \emptyset$ в силу теоремы Крейна–Мильмана.

Доказано:

— $\mathfrak{B}(C) \subset \mathfrak{B}\backslash\overline{\operatorname{conv}}^{\,\mathrm{n}}\operatorname{ext}\mathfrak{B}$, где $\overline{\operatorname{conv}}^{\,\mathrm{n}}$ — замыкание выпуклой оболочки в нормированной топологии.

— Множество экстремальных точек $\mathfrak{B}(C)$ имеет мощность 2^c, где c — континуум.

— Расстояние между любыми двумя экстремальными точками равно 2 и подпространство, порожденное любой счетной последовательностью из $\operatorname{ext}\mathfrak{B}(C)$, изометрично в l_1.

Эти три утверждения говорят о том, что $\mathfrak{B}(C)$ (как и $\mathfrak{B}$) можно рассматривать как симплекс размерности 2^c.

Доказано, что для любого натурального n существует $B \in \mathfrak{B}(\sigma_n)\backslash\mathfrak{B}(C)$.

Хорошо известно, что сфера любого банахова пространства не является выпуклым множеством. Сферы $S_{B,r}$ в множестве $\mathfrak{B}$ обладают следующими уникальными свойствами:

1. Для любого $B \in \mathfrak{B}$ сфера $S_{B,2}$ выпукла.

2. Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Сфера $S_{B,r}$ выпукла для любого $r \in (0,2)$ тогда и только тогда, когда $B \in \operatorname{ext}\mathfrak{B}$.

3. Для любого $r \in (0,2)$ существует такой $B \in \mathfrak{B}$, что сфера $S_{B,r}$ невыпукла.

Изложенные выше результаты получены Е.М. Семеновым и А.А. Усачевым совместно с Е.А. Алехно (Белорусский государственный университ, Беларусь) и Ф.А. Сукочевым (Университет Сиднея, Австралия).

Е.М. Семеновым и студентом математического факультета ВГУ Н.Н. Авдеевым изучались точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ на плоскости такие, что расстояния $|M_iM_j|$ — целые числа для всех $1 \leq i,j \leq n$. Получены оценки диаметра таких множеств. Изучены оптимальные наборы таких множеств, т.е. множеств с минимальным диаметром. Написана компьютерная программа, с помощью которой вычисляется минимальный диаметр множеств $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ для $n \leq 41$. Работа опубликована в журнале «Математические заметки».